Całka podwójna

Obliczyć dane całki podwójne po wskazanych prostokątach:

$a)\ \iint\limits_R dxdy, R=[0,1]\times[0,2]$

$b)\ \iint\limits_R x^2 y dxdy, R=[1,2]\times[0,3]$

$c)\ \iint\limits_R \sqrt{x}y^3 dxdy, R=[0,4]\times[0,1]$

$d)\ \iint\limits_R x\sin y dxdy, R=[0,1]\times[0,\pi]$

$e)\ \iint\limits_R \frac{y}{1+x^2} dxdy, R=[0,1]\times[0,1]$

$f)\ \iint\limits_R \frac{x^3}{\cos^2 y} dxdy, R=[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$g)\ \iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}; R=[0,2]\times[0,1]$

$h)\ \iint\limits_R e^{2x-y} dxdy, R=[0,1]\times[-1,0]$

$i)\ \iint\limits_R (x+y^2x) dxdy, R=[1,2]\times[0,3]$

$j)\ \iint\limits_R xy\ln\frac{x}{y} dxdy, R=[1,e]\times[1,2]$

$k)\ \iint\limits_R \frac{\sqrt{x}y^3+4x^5}{xy^2} dxdy, R=[1,4]\times[2,3]$

$l)\ \iint\limits_R xy^3 e^{x^2-1} dxdy, R=[0,1]\times[-1,0]$

Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ zamienić na całki iterowane jeśli obszar D ograniczony jest krzywymi o podanych równaniach:

$a)\ y=x^2,\ \ y=4$

$b)\ xy=6,\ \ x+y=7$

$c)\ y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}$

$d)\ y=0,\ \ x=2,\ \ y=x^2$

$e)\ y=\frac{1}{x},\ \ y=x,\ \ y=2x,\ \ x>0$

$f)\ x^2+y^2=1$

$g)\ x^2-4x+y^2+6y-51=0$

$h)\ y=\sqrt{1-x^2},\ \ x\geq 0$

$i)\ y=-1,\ y=1,\ x=2-\sqrt{1-y^2},\ x=\sqrt{1-y^2}-1$

$j)\ x^2-y^2=1,\ \ \ x^2+y^2=3$

$k)\ y=1+\sqrt{2x-x^2},\ x=0, x=2,\ y=0$

W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania:

$a)\ \int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy$

$b)\ \int_{-1}^1 dx\int_0^{|x|} f(x,y)dy$

$c)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx\int_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)dy$

$d)\ \int_0^2 dx\int_2^{4-x} f(x,y)dy$

$e)\ \int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)dy$

$f)\ \int_1^e dx\int_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$

$g)\ \int_0^{\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy$

$h)\ \int_0^4 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$

$i)\ \int_1^{e^2} dy\int_0^{\ln y} f(x,y)dx$

$j)\ \int_{-2}^2 dy\int_{y^2}^{4} f(x,y)dx$

$k)\ \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy\int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)dx$

$l)\ \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{|x|} f(x,y)dx$

Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

$a)\ \iint\limits_D dxdy,\ D: x^2+y^2\leq 1$

$b)\ \iint\limits_D xdxdy;\ D: \begin{cases} x^2+y^2\leq 4 \\ x\geq 0 \end{cases}$

$c)\ \iint\limits_D xydxdy,\ D: \begin{cases} x\geq 0 \\ 1\leq x^2+y^2\leq 2 \end{cases}$

$d)\ \iint\limits_D xy^2dxdy,\ D: \begin{cases} x\leq 0 \\ x^2+y^2\leq 4 \end{cases}$

$e)\ \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,\ D: x^2+y^2-2y=0$

$f)\ \iint\limits_D ydxdy,\ D: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=1 \\ y=x \quad (x\geq 0, y\geq 0) \\ y=0 \end{cases}$

$g)\ \iint\limits_D y^2 e^{x^2+y^2} dxdy,\ D: \begin{cases} x\geq 0, y\geq 0 \\ x^2+y^2\leq 1 \end{cases}$

$h)\ \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,\ D: \begin{cases} y\geq 0 \\ y\leq x^2+y^2\leq x \end{cases}$

$i)\ \iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2-1};\ D: \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

$j)\ \iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy,\ D: \begin{cases} 1\leq x^2+y^2\leq 4 \\ y\geq 0 \end{cases}$

Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:

$a)\ y^2=4x,\ \ y+x=3,\ \ y\geq 0$

$b)\ x=y^2,\ \ x=1$

$c)\ x^2+y^2-2y=0,\ \ x^2+y^2-4y=0$

$d)\ x^2y=1,\ \ y=x,\ \ y=2x,\ \ (x,y>0)$

$e)\ x^2+y^2=2,\ \ y=0,\ \ y=x\sqrt{x}$

$f)\ y=e^x,\ \ y=\ln x,\ \ x+y=1,\ \ x=2$

Obliczyć objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami:

$a)\ x^2+y^2-2y=0,\ \ z=x^2+y^2=3,\ \ z=0$

$b)\ x^2+y^2+z^2-2z=0$

$c)\ x^2+y^2=1,\ \ x+y+z=3,\ \ z=0$

$d)\ x^2+y^2+z^2=4,\ \ x^2+y^2=1$

$e)\ z=4-x^2-y^2,\ \ z=0$

$f)\ z=9-x^2,\ \ z=0,\ \ y^2=3x$

$g)\ z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ z=0,\ \ x^2+y^2=1,\ \ x^2+y^2=16$

$h)\ z=e^{y-x},\ \ x+y=1,\ \ y^2=3x,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$

Obliczyć pola powierzchni płatów określonych podanymi równaniami:

$a)\ z=8-2x-2y;\ x=0;\ \ y=1;\ \ z=0$

$b)\ z=x^2+y^2;\ \ x^2+y^2\leq 1$

$c)\ z=\sqrt{x^2+y^2};\ \ x^2+y^2=2x$

$d)\ z=\sqrt{16-x^2-y^2};\ 1\leq z\leq 2$

Obliczyć masy podanych obszarów o wskazanych gęstościach powierzchniowych:

$a)\ D: \begin{cases} 0\leq y\leq 2-x \\ x=0 \end{cases} \qquad \sigma(x,y)=xy$

$b)\ D: \begin{cases} 4\geq x^2+y^2\geq 1 \\ y\geq 0 \end{cases} \qquad \sigma(x,y)=|x|$

Obliczyć moment statyczny obszaru D względem osi Ox i Oy:

$D: x^2\leq y\leq 1 \qquad \sigma(x,y)=1$

Znaleźć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

$a)\ D: \{(x,y)\in R^2 : 0\leq x\leq \pi;\ \ 0\leq y\leq \sin^2 x\}$

$b)\ D: \{(x,y)\in R^2 : 0\leq x\leq 1;\ \ 0\leq y\leq e^x\}$

Obliczyć momenty bezwładności podanych obszarów względem wskazanych osi:

$a)\ D: \{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\leq T^2;\ \ 0\geq y\},\ \sigma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \quad OX$

$b)\ D: \{(x,y)\in R^2 : -1\leq x\leq 1;\ \ 0\leq y\leq 1-x^2\},\ \sigma(x,y)=x^2 \quad OY$